

# Variable Compleja I

## Examen XIX

FACULTAD  
DE  
CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://github.com/losdeldgiim)

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas  
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

# Variable Compleja I

## Examen XIX

Los Del DGIIM, [losdeldgiim.github.io](https://losdeldgiim.github.io)

David Muñoz Gómez

Granada, 2025-26

**Asignatura** Variable Compleja I.

**Curso Académico** 2025/2026.

**Grado** Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Grupo** Único.

**Profesor** Javier Meri de la Maza.

**Descripción** Convocatoria ordinaria.

**Fecha** 19 de junio de 2026.

**Duración** 3h.

**Ejercicio 1** (1.5 puntos). Sea  $R \in \mathbb{R}^+$  y  $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$ , no constante. Pruebe que la función  $M: ]0, R[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0, r)\} \quad \forall r \in ]0, R[$$

es estrictamente creciente.

**Ejercicio 2** (2 puntos). Sea  $f$  una función entera verificando que existen constantes  $R, \epsilon > 0$  tales que

$$|f(z)| \geq \epsilon, \text{ si } |z| \geq R.$$

Pruebe que  $f$  es constante o tiene algún cero en  $D(0, R)$ .

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Integrando una conveniente función compleja sobre la poligonal  $[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$  con  $R \in \mathbb{R}^+$ , calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

**Ejercicio 4** (1 punto por cada apartado). Demuestre los siguientes enunciados:

1. Sea  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  verificando  $f(1/n) = 1/n^2$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Calcule  $f$ .
2. La siguiente función es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y admite una extensión entera.

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_{C(0,1)} \frac{e^{zw} - 1}{zw} dw$$

3. No existe una función  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  tal que  $|z^2| + |e^z| \leq |f(z)|$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ .
4. Dé un ejemplo de función  $f \in \mathcal{H}(D(0, 1))$  no acotada con  $\text{Im}(f)$  acotada.

**Solución.**

**Ejercicio 1** (1.5 puntos). Sea  $R \in \mathbb{R}^+$  y  $f \in \mathcal{H}(D(0, R))$ , no constante. Pruebe que la función  $M: ]0, R[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$M(r) = \max\{|f(z)| : z \in C(0, r)\} \quad \forall r \in ]0, R[$$

es estrictamente creciente.

Dados  $r_1, r_2 \in ]0, R[$  con  $r_1 < r_2$ , veamos que  $M(r_1) < M(r_2)$ . Como  $r_2 < R$ ,  $\overline{D}(0, r_2) \subset D(0, R)$ . Por el Principio del Módulo Máximo, tenemos que:

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, r_2)\} = \max\{|f(z)| : z \in C(0, r_2)^*\} = M(r_2).$$

Además, la desigualdad es estricta para todo punto del interior, es decir, si  $z \in D(0, r_2)$  entonces  $|f(z)| < M(r_2)$ , pues el Principio del Módulo Máximo indica que en caso de darse la igualdad en algún punto interior,  $f$  es constante. Pero  $f$  no lo es por hipótesis.

Como  $r_1 < r_2$ , tenemos que  $\overline{D}(0, r_1) \subset D(0, r_2)$ . En particular, si  $z \in C(0, r_1)^* \subset D(0, r_2)$ , se cumple que  $|f(z)| < M(r_2)$ .

Por lo tanto, tomando el máximo sobre la circunferencia de radio  $r_1$ , resulta:

$$\max\{|f(z)| : z \in C(0, r_1)^*\} = M(r_1) < M(r_2)$$

**Ejercicio 2** (2 puntos). Sea  $f$  una función entera verificando que existen constantes  $R, \epsilon > 0$  tales que

$$|f(z)| \geq \epsilon, \text{ si } |z| \geq R.$$

Pruebe que  $f$  es constante o tiene algún cero en  $D(0, R)$ .

Supongamos que  $f$  no es una función polinómica. En ese caso, por el corolario del Teorema de Casorati sabemos que:

$$\exists \{z_n\} \rightarrow \infty \quad \text{tal que} \quad \{f(z_n)\} \rightarrow 0$$

Por tanto, por la divergencia de la sucesión  $\{z_n\}$  está garantizado que

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_1 \Rightarrow |z_m| \geq R$$

Por la convergencia de la sucesión  $\{f(z_n)\}$  está garantizado que

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_2 \Rightarrow |f(z_m)| < \epsilon$$

Tomando  $n = \max\{n_1, n_2\}$  vemos que  $\forall m \geq n : |f(z_m)| < \epsilon \wedge |z_m| \geq R$

Esto es una contradicción con la propiedad que verifica  $f$ .

Por tanto,  $f$  debe ser un polinomio o bien constante o de grado mayor o igual que 1. Supongamos que  $f$  no es constante, entonces como hemos dicho  $\deg(f) \geq 1$ .

Por el Teorema fundamental del Álgebra:  $\exists z \in \mathbb{C} : f(z) = 0$ , aunque realmente existirán tantos como el grado de  $f$  contando multiplicidad. Como  $f(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| = 0 < \epsilon$ , tenemos que  $|z| < R \iff z \in D(0, R)$

Por tanto, concluimos que o  $f$  es un polinomio constante o tiene una raíz en  $D(0, R)$ .

**Ejercicio 3** (2.5 puntos). Integrando una conveniente función compleja sobre la poligonal  $[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$  con  $R \in \mathbb{R}^+$ , calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{e^x + e^{-x}} dx.$$

**Ejercicio 4** (1 punto por cada apartado). Demuestre los siguientes enunciados:

1. Sea  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  verificando  $f(1/n) = 1/n^2$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Calcule  $f$ .

Sea  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ . Claramente  $A$  tiene al 0 como punto de acumulación. Como  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  y  $A' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ , aplicando el principio de identidad:

$$f(z) = z^3 \quad \forall z \in A \implies f(z) = z^3 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. La siguiente función es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y admite una extensión entera.

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \int_{C(0,1)} \frac{e^{zw} - 1}{zw} dw$$

Sea la siguiente función:

$$\phi : C(0,1) \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (w, z) \longmapsto \frac{e^{zw} - 1}{zw}$$

Como  $zw \neq 0$  para todo  $w \in C(0,1)$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  vemos que  $\phi(w, z)$  es continua.

Además,  $\phi_w(z) = \phi(w, z)$  es cociente de funciones holomorfas en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  luego  $\phi_w(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Por el Teorema de integrales dependientes de parámetros  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ .

Para ver que tiene extensión entera hay muchas formas de hacerlo, pero una manera curiosa y con resultados inesperados es como sigue. Calculamos explícitamente el valor de la integral para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Separando el integrando por linealidad vemos que:

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_{C(0,1)} \frac{e^{zw}}{w} dw - \frac{1}{z} \int_{C(0,1)} \frac{1}{w} dw$$

Aplicamos la Fórmula Integral de Cauchy en  $w_0 = 0$  a la función entera  $g(w) = e^{zw}$ :

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^{zw}}{w} dw = 2\pi i \cdot g(0) = 2\pi i$$

Sabiendo por parametrización usual que  $\int_{C(0,1)} \frac{1}{w} dw = 2\pi i$  obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{z}(2\pi i - 2\pi i) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Para ver el comportamiento en el origen calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} 0 = 0$$

Como el límite existe y es un valor finito en  $\mathbb{C}$ , por el Teorema de Extensión de Riemann la singularidad en  $z = 0$  es evitable. Por tanto,  $f$  admite una extensión entera  $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  dada por  $\tilde{f}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ .

3. No existe una función  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  tal que  $|z^2| + |e^z| \leq |f(z)|$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ .

Supongamos que  $f$  es no polinómica. Como además es entera, por el corolario del Teorema de Casorati:

$$\exists \{z_n\} \rightarrow \infty \quad \text{tal que} \quad \{f(z_n)\} \rightarrow 0$$

Pero como  $z^2$  es un polinomio,  $|z_n^2| \rightarrow \infty$  y  $|e^{z_n}| > 0$  pero  $|z_n^2| + |e^{z_n}| \leq |f(z_n)|$ . Esto es una contradicción, por tanto  $f$  solo puede ser un polinomio, pero si  $f$  es un polinomio:

$$|z^2| + |e^z| \leq |f(z)| \Rightarrow |e^z| \leq |f(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Esta desigualdad nos indica que la función  $e^z$  tiene crecimiento subpolinómico no solo en el exterior de un disco<sup>1</sup> sino en todo  $\mathbb{C}$ , en cuyo caso  $e^z$  sería un polinomio.

4. Dé un ejemplo de función  $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$  no acotada con  $\text{Im}(f)$  acotada.

Sea la siguiente función, que emplea el logaritmo principal:

$$f : \mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \log(1+z)$$

Como  $\log(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z)$  y el  $\ln$  es una función estrictamente creciente y  $|\arg(1+z)| \leq \pi$  este es un ejemplo de función con imagen no acotada pero parte imaginaria acotada.

---

<sup>1</sup>Ejercicio 2 de la relación de ceros de funciones holomorfas.